

# ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

## 1. ЛЕКЦИЯ 15

Пусть  $F$  – пучок  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ -модулей.

$f \in F(U)$  называется *сечением* пучка над  $U$ .

$f \in F(X_\Sigma)$  называется *глобальным сечением*.

Рассмотрим пример веера  $\Sigma$ , порожденного двумя конусами (см рисунок) и построим два разных пучка  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ -модулей.

У первого – нет глобальных сечений кроме тождественного нуля.

У второго – есть глобальные сечения (они образуют векторное пространство над  $\mathbb{C}$ , и его размерность можно регулировать, варьируя сдвиги).

В каждом случае для получения таких согласованных сдвигов всех трех конусов необходимо и достаточно выполнение условия ортогональности

$$(m_\sigma - m_{\sigma'}) \perp \tau.$$

Следующая теорема обобщает рассмотренный пример.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\Sigma$  - полный веер,

пусть каждому конусу  $\sigma$  максимальной размерности поставлена в соответствие точка  $m_\sigma \in \mathbb{Z}^n$ .

Пусть при этом выполнено условие ортогональности:

$$\forall \sigma, \sigma' \quad (m_\sigma - m_{\sigma'}) \perp (\sigma \cap \sigma').$$

Тогда соответствие  $X_\Sigma \rightarrow \{f : \text{supp } f \subset m_\sigma + \check{\sigma}\}$  задает некоторый пучок  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ -модулей.

**Важный пример.**

Пусть  $K$  – выпуклый многогранник с вершинами в точках решетки. Возьмем в качестве веера его внешний нормальный веер  $\Sigma = \Sigma_K$ .

Далее, каждому конусу максимальной размерности  $\sigma$  соответствует (по двойственности) вершина  $K$ , назовем ее  $m_\sigma$ .

Совокупность  $\sigma \rightarrow m_\sigma$  удовлетворяет условию ортогональности и задает согласно теореме пучок  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ -модулей.

И каковы же его глобальные сечения? (Аналогия с примером, догадайтесь!)

Правильно, те полиномы Лорана, носители которых содержатся в  $K$ . Потому что  $K$  и есть пересечение всех подвинутых двойственных конусов.

*E-mail address:* [gaiane-panina@rambler.ru](mailto:gaiane-panina@rambler.ru), [gaiane@mail.wpus.net](mailto:gaiane@mail.wpus.net)