ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 16

Пусть Σ – полный веер в $\mathbb{R}^n$.

- Обозначим через P_Σ множество всех виртуальных многогранников K в вершинами в $\mathbb{Z}^n$, таких, что Σ – измельчение нормального веера Σ_K;
  Это группа относительно сложения Минковского.
- Пусть H_Σ – множество всех функций h, заданных на $\mathbb{R}^n$, которые непрерывны, линейны на каждом, и целочисленны (т.е. $\forall \sigma \in \Sigma \;\; h\mid_\sigma (x) = (m_\sigma, x)$ для некоторого $m_\sigma \in \mathbb{Z}^n$).
  Это группа. Операция – поточечное сложение.
- Обозначим $CP_\Sigma = \{\{(m_\sigma + \check{\sigma}\} \mid_{\sigma\in\Sigma}$: $(m_\sigma - m_{\sigma'} \perp \sigma \cap \sigma', m_\sigma \in \mathbb{Z}^n\}$. Вспомним, что каждый элемент отсюда задает пучок $\mathcal{O}_X$-модулей.
  Это группа. Сложение задается так: $\{(m_\sigma + \check{\sigma}\} + \{(m'_\sigma + \check{\sigma}\} = \{((m_\sigma + m'_\sigma) + \check{\sigma}\}$.

Все три группы изоморфны. Следовательно, изоморфны их факторы, при которых отождествляется многогранник и его образ при параллельном переносе.

Дивизоры

Определение 1.1. Пусть $Y \subset X_\Sigma$ – открыто по Зарисскому. $D \subset Y$ – *простой дивизор на* Y, если
$\forall \sigma \in \Sigma \quad D \cap X_\sigma \cap Y$ – $n-1$-мерное алгебраическое подмногообразие $X_\sigma \cap Y$.

Инвариантный простой дивизор инвариантен под действием тора.

Определение 1.2. *Дивизором* (Вейля) называется формальная сумма $D = \sum n_i D_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$. Дивизоры Вейля образуют группу.

Определение 1.3. Дивизор называется *эффективным* (и пишем $D \geq 0$), если $n_i \geq 0$.

Если $R_{\check{\sigma}}$ факториально (а это всегда так, когда конус регулярен), то идеал $i_{D,X_{\check{\sigma}}}$ порожден одним элементом $f \in R_{\check{\sigma}}$. Иначе говоря, $D \cap X_{\check{\sigma}}$ задается одним уравнением $f = 0$.

Определение 1.4. Пусть $f = g/h$ – рациональная функция на $X_{\check{\sigma}}$. Пусть в этой карте D задается уравнением $g_D = 0$. Определим

$n_{D,g}$– максимальная степень k такая, что g_D^k делит g.

Определим теперь $n_{D,f} = n_{D,g} - n_{D,h}$. Смысл – это "степень нуля функции $f = g/h$ на многоообразии D".

Лемма 1.5. *$n_{D,f}$ не зависит ни от выбора карты (лишь бы она непусто пересекалась с D), ни от представления $f = g/h$ в виде дроби, ни от выбора g_D.*

Для фиксированной функции f число $n_{D,f}$ отлично от нуля лишь для конечного числа простых дивизоров.

Определение 1.6. Дивизор называется *главным*, если он имеет вид

$$(f) = \sum n_{D,f} D$$

для некоторой рациональной функции f.

Два дивизора *линейно эквивалентны*, если их разность – главный дивизор.

Дивизор называется *локально главным (или дивизором Картье)*, если у каждой его точки есть окрестность, в которой сужение дивизора – главный дивизор.

Лемма 1.7. *Пусть σ – регулярный конус, D – дивизор Вейля на $X_{\check{\sigma}}$. Тогда D – главный.*

E-mail address: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net