ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 19

Линейные расслоения

Определение 1.1. Пусть X_Σ – торическое многообразие, $\{U_\alpha\}$ – его открытое покрытие.

Пусть $g_{\alpha\beta} \in R_{U_\alpha \cap U_\beta}$ – набор обратимых элементов таких, что выполнены условия согласованности:

- $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$
- $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

Линейным расслоением $\mathcal{L}(g_{\alpha\beta})$ над X_Σ называется алгебраическое многообразие, получающееся склейкой карт $U_\alpha \times \mathbb{C}$ и $U_\beta \times \mathbb{C}$ с помощью функций склейки

$$\psi : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \quad \psi(x, c) = (x, g_{\alpha\beta}(x)c).$$

Пример.

Тривиальное линейное расслоение $X_\Sigma \times \mathbb{C}$.

Определение 1.2. Тензорное произведение двух линейных расслоений задается как

$$\mathcal{L}(g_{\alpha\beta}) \otimes \mathcal{L}(g'_{\alpha\beta}) = \mathcal{L}(g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}).$$

Теорема 1.3. *Группа линейных расслоений (с отождествлением изоморфных копий) изоморфна группе Пикара.*

Доказательство.

Построим групповой изоморфизм.

Пусть D – дивизор. На U_α пусть $D = (f_\alpha)$, на U_β пусть $D = (f_\beta)$. Функции $g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta \in R_{U_\alpha \cap U_\beta}$ задают линейное расслоение.

Обратно,

Введем понятие *сечения* линейного расслоения.

Сечением расслоения $\mathcal{L}(g_{\alpha\beta})$ на множестве U называется отображение

$$s : U \to \pi^{-1}(U) \quad s(x) = (x, g_s(x)),$$

где g_s регулярна на U и $g_{s\alpha}/g_{s\beta} = g_{\alpha\beta}$.

Каждому U сопоставим множество сечений. Это пучок модулей,т.е. элемент группы Пикара.

E-mail address: `gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net`