ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 2, часть 1

Лемма 1.1. *Афф алг множество X неприводимо iff i_X – простой идеал.*

Теорема 1.2. *Гильберта о нулях. Пусть $\mathfrak{a}$ - идеал. Тогда $f \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \exists k : f^k \in \mathfrak{a}$.*

Следствие.
Имеется взаимно-однозначное соответствие
$\mathbb{C}^m \quad \longleftrightarrow$ max идеалы $\longleftrightarrow \quad Hom(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$

Лемма 1.3. *Максимальные идеалы фактора $R/\mathfrak{a}$ имеют вид $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$, где – $\mathfrak{m}$ максимальный идеал R, содержащий $\mathfrak{a}$.*

Следствие.
Пусть V -афф алг множество. Имеется взаимно-однозначное соответствие
$V \quad \longleftrightarrow$ max идеалы $R_V \longleftrightarrow \quad Hom(R_V, \mathbb{C})$

Определение 1.4. Аффинное алг многообразие – неприводимое аффинное алг множество.

Квазиаффинное алг многообразие – открытое подмн-во аффинного алг многообразия.

Примечание. "открытое"относится к индуцированной топологии Зарисского.

Определение 1.5. Пусть Y – квазиаффинное мн-е, подмножество аффинного мн-я V. Тогда кольцо R_V – область целостности. Рассмотрим его поле частных (поле формальных дробей) K_V. Функция $f \in K_V$ называется регулярной в точке $x \in V$, если у этой точки есть окрестность U_x, где $f = g/h$, причем h нигде не обращается в ноль в U_x.

Функция $f \in K_V$ называется регулярной на Y если она регулярна $\forall x \in Y$.

Кольцо регулярных функций на Y обозначим через R_Y.

Лемма 1.6. *Пусть $Y = V$ Тогда все регулярные функции на Y суть полиномы. Точнее,*
$R_Y = R_V$.

2. Лекция 2, часть 2

Теперь рассмотрим вещественное пространство $\mathbb{R}^n$. Базис фиксирован, и, разумеется, фиксировано начало координат. В этом пространстве лежит стандартная решетка Z^n.

Ее элементы называются решеточными векторами (решеточными точками).

Определение 2.1. $pos(M) := \{\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_k y_k : \lambda_i \geq 0, y_i \in M\}$ – положительная оболочка множества M, она же – выпуклый конус с вершиной в начале координат, натянутый на M.

Вершины, правда, может и не быть – например все пр-во – тоже конус.

Определение 2.2. Конус решеточный, если он представим в виде *pos* от решеточных точек.

Конус простой, если он представим в виде *pos* от линейно независимых векторов.

Конус симплициальный, если его грани (они тоже конуса) – простые.

Замечание. Пересечение конуса с решеткой $\sigma \cap Z^n$ – полугруппа с нулем (относительно сложения).

Лемма 2.3. *Для решеточного конуса полугруппа $\sigma \cap Z^n$ конечно порождена.*

E-mail address: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net