ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 20

Смешанные объемы

Определение 1.1. Пусть $K_1, ..., K_n$ – выпуклые многогранники, V– -мерный объем, $\lambda_1, ..., \lambda_n$– положительные числа. Тогда $V(K_1 \otimes ... \otimes K_n)$ (как функция от $\lambda_1, ..., \lambda_n$) – однородный полином степени n. Его коэффициент при $\lambda_1 ... \lambda_n$ называется смешанным объемом $V(K_1, ..., K_n)$.

Доказательство – по индукции, с помощью формулы $V(K) = 1/n \sum h_K(\xi) V(K^\xi)$.

То же (утверждение и определение) имеет место для виртуальных многогранников.

Теорема 1.2. $V(K_1, ..., K_n) = 1/n \sum h_K(\xi) V(K_2^\xi, ..., K_n^\xi)$.

Виртуальные многогранники, соответствующие простым дивизорам. Их объемы и смешанные объемы

Пусть X_Σ – полное гладкое торическое,τ_i – одномерный конус, D_i – соответствующий ему простой дивизор. Ему соответствует некоторый виртуальый многогранник (см. рисунок). Обозначим его через d_i.

Теорема 1.3. *(для $n = 2$) Для разных i, j справедливо*

$$V(d_i, d_j) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } i \text{ и } j \text{ соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если τ_i регулярно разбивает регулярный же конус, то
$V(d_i) = -1/2.$

Теорема 1.4. *(для произвольного n) Для разных $i_1, ..., i_n$ справедливо*

$$V(d_{i_1}, ..., d_{i_n}) = \begin{cases} 1/n!, & \text{если } i_1, ..., i_n \text{ – ребра некоторого общего конуса;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если τ_i регулярно разбивает регулярный же конус, то
$V(d_i) = -1/n!.$

E-mail address: `gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net`