ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 21

Индекс пересечения

Определение 1.1. Пусть X_Σ– полное, гладкое.

Отображение $Div \times ... \times Div \to \mathbb{Z}$ называется *индексом пересечения*, если оно

(1) инвариантно относительно перестановки
(2) инвариантно относительно линейной эквивалентности
(3) линейно по каждому аргументу
(4) Для разных $\tau_1, ..., \tau_n$ $< D_{\tau_1}, ..., D_{\tau_n} >= \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_1 + ... + \tau_n \in \Sigma; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Теорема 1.2. *Индекс пересечения существует и единственный.*

Доказательство.

Единственность.

Сведем вычисление индекса пересечения к уже известному по 4 аксиоме. Пользуемся линейностью и возможностью заменить дивизор на линейно эквивалентный, что выражается параллельным переносом соответствующего виртуального многогранника.

Существование.

Положим $< d_1, ..., d_n >= n!V(K(d_1), ..., K(d_n))$.

Теорема Бернштейна-Кушниренко

Теорема 1.3. *Пусть $f_1, ..., f_n$ – полиномы (общего положения) с ненулевыми свободными членами от n переменных.*

Тогда число решений системы $f_1 = 0, ..., f_n = 0$ равно $n!V(K_1, ..., K_n)$, где K_i – их многогранники Ньютона.

Обозначим Σ_i – веер K_i.

Пусть Σ – общее измельчение вееров Σ_i , подразбитое еще до регулярного веера. Обозначим через D_i простые инвариантные дивизоры X_Σ,

K_i^τ – грань многогранника K_i,

f_i^τ – часть полинома f_i, соответствующая K_i^τ,

$d(f_i) = Cl((f_i) \cap T)$ (это не главный дивизор!),

$d^T(f_i)$ – эквивалентный ему инвариантный дивизор.

Лемма 1.4. $d^T(f_i) = \sum h_{K_i}(\tau_j)D_j$.

Лемма 1.5. $d(f_i) \cap D_j = d(f_i^{\tau_j})$.

Докажем теорему индукцией по размерности. База совпадает с основной теоремой алгебры. Переход:

Число решений системы $=< d(f_1), ..., d(f_n) >=$
$=< d^T(f_1), ..., d(f_n) >= \sum h_{K_1}(\tau_j) < D_j, d(f_2), ..., d(f_n) >=$
$= \sum h_{K_1}(\tau_j) < d(f_2) \cap D_j, ..., d(f_n) \cap D_j >=$
по индукционному предположению
$= \sum h_{K_1}(\tau_j)(n-1)!V(K_2^{\tau_j}, ..., K_n^{\tau_j}) = n!V(K_1, ..., K_n)$.

E-mail address: `gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net`