ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 4

Для $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ и мультипеременной $z = (z_1, ..., z_n)$ обозначим $z^a := z_1^{a_1} \cdot ... \cdot z_n^{a_n}$ – моном Лорана.

Пусть $f = \sum_a \lambda_a z^a \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ – полином Лорана. Его носителем называется множество решеточных точек $suppf := \{a \in Z^n : \lambda_a \neq o\}$

Отображение $\upsilon : Z^n \to \mathbb{C}[z, z^{-1}], \quad \upsilon(a) = z^a$ есть групповой гомоморфизм решетки и ее образа (множества всех мономов Лорана, рассмотренного как мультипликативная группа).

Лемма 1.1.
- *$supp(f + g) \subset supp\ f \cup supp\ g$*
- *$Conv\ supp\ (fg) = Conv\ supp\ f + Conv\ supp\ g$*
  (имеется ввиду сумма Минковского).

Определение 1.2. Пусть σ – конус в R^n. Свяжем с ним подкольцо кольца полиномов Лорана : $R_: = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : suppf \subset \sigma\}$. Кольцо R_σ – область целостности. Оно является кольцом регулярных функций некоторого аффинного алг многообразия X_σ, определенного с точностью до изоморфизма. Последнее называется аффинным торическим многообразием, связанным с конусом σ.

Как построить явно многообразие X_σ?
- Выбрать набор решеточных точек $a_1, ..., a_k$, порождающий конус σ.
- Выписать все линейные соотношения (вспомним, что такой набор совсем не всегда является базисом). Каждое линейное соотношение представить в виде $\Sigma\lambda_i a_i = \Sigma\mu_i a_i; \quad \lambda_i, \mu_i > 0$
- Кольцо R_σ порождено образами элементов $a_1, ..., a_k$, которые мы обозначим через $z_1, ...z_k$. Образующие соотношения в ней – образы линейных соотношений. Они имеют вид $z^\lambda = z^\mu$.
- Следовательно, $R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]/ < \{z^\lambda - z^\mu\} >$
  и $X_\sigma = V(\{z^\lambda - z^\mu\})$.

Определение 1.3. Конус σ называется унимодулярным, если $\sigma = pos(a_1, ..., a_n)$ и $det(a_1, ..., a_n) = \pm 1$.

Лемма 1.4. *Для унимодулярного конуса $X_\sigma = \mathbb{C}^n$.*

Пример 1.5. *Пусть e_1, e_2 – базис R^2.*
- *$\sigma \subset R^2$, $\sigma = pos(e_1, e_2, -e_1)$.*

- $\sigma \subset R^2$, $\sigma = pos(e_1, 2e_2 + e_1)$. *Здесь* X_σ – *конус* $z_3^2 = z_1 z_2$, *есть сингулярность.*

E-mail address: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net