ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 5

Замечание.
Размерность многообразия X_σ равна размерности конуса σ.
Замечание.
Точки афф торического многообразия можно покоординатно перемножать.

Морфизм называется торическим, если новые координаты выражаются через старые через мономы Лорана:
$\varphi : X \to Y$
$X(u_1, ..., u_k)\ Y(t_1, ..., t_m)$
$t_i = u^{\alpha^i},\ \alpha^i \in Z^k$.
Аффинное мн-е X называется торическим, если $X = V(\mathfrak{a})$, где
$\mathfrak{a} =< \{u^a - u^b\} >$.

Примеры торических морфизмов.
1. На проективной плоскости общие части аффинных карт изоморфны. Изоморфизмы суть торические изоморфизмы.
2. Наиболее общий пример такой. Пусть $\sigma \subset R^k, \tau \subset R^m$ - решеточные конуса. $\sigma \cap Z^k \to \tau \cap Z^m$ - гомоморфизм полугрупп. Он порождает гомоморфизм алгебр $R_\sigma \to R_\tau$. А значит, и торический морфизм $X_\sigma \to X_\tau$

Лемма 1.1.
- *Всякое торическое многообразие изоморфно X_σ для некоторого решеточного конуса σ.*
- *Всякий торический морфизм порожден некоторым гомоморфизмом конусов (как в примере 2).*

Определение 1.2. (торическое) алгебраическое многообразие есть набор карт U_i со склейками. Карты – (торические) афф алг многообразия, склейки – (торические) морфизмы $\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$ по общим квазиафинным подмножествам $U_{ij} \subset U_i$. При этом должны быть выполнены стандартные условия согласованности:
$\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$
$\varphi_{ji} \circ \varphi_{ik} = \varphi_{jk}$
Для (торического) многообразия хорошо определены
–топология Зарисского
–пучок регулярных функций

Каждое афф торическое многообразие содержит тор как открытое по Зарисскому подмножество. Тор действует на нем:

Примеры.

(1) тор $T^2 \subset C^2$ действует на C^2:
$(t_1, t_2) : (u_1, u_2) \to (t_1 u_1, t_2 u_2)$.

(2) тор T^1 действует на $V(u_1 u_2 - 1)$:
$t : (u_1, u_2) \to (tu_1, u_2/t)$
и вкладывается в $V(u_1 u_2 - 1)$:
$t \to (t, 1/t)$.

(3) Проективная плоскость содержит тор T^2:
$(t_1, t_2) \to (t_1, t_2, 1)$.
Тор действует на CP^2:
$(t_1, t_2) : (x : y : z) \to (t_1 x : t_2 y : z)$.

Общая ситуация описывается так:

Теорема-определение.

Пусть σ - решеточный конус. Пусть $\{a_1, ..., a_k\}$ порождают полугруппу $\sigma \cap Z^n$.

Тогда отображение
$\gamma : T^n \to X_\sigma \subset C^k$
$\gamma : t = (t_1, ..., t_n) \to (t^{a_1}, ..., t^{a_k})$
отображает биективно тор T^n на открытое подмножество X_σ
Тор действует на X_σ:
$t = (t_1, ..., t_n) : (x_1, ...x_k) \to (t^{a_1} x_1, ..., t^{a_k} x_k)$.

E-mail address: `gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net`