

ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. ЛЕКЦИЯ 7

Определение 1.1. Пусть H – гиперплоскость, $K \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое выпуклое множество. H называется опорной гиперплоскостью, если $K \subset H^+$ или $K \subset H^-$, причем $K \cap H \neq \emptyset$

Теорема 1.2. Замкнутое выпуклое множество (но не все пр-во) есть пересечение всех полупространств, содержащих его H^+ или H^- . \square

Теорема 1.3. Через всякую точку границы замкнутого выпуклого множества проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость. \square

Определение 1.4. Для выпуклого многогранника или выпуклого многогр конуса грань – пересечение K с опорной гиперплоскостью, а также K и \emptyset (несобственные, improper)

- вершина
- ребро
- гипергрань (facet)

Теорема 1.5. Пересечение граней есть грань. \square

Грань конуса – конус.

Двойственные конуса.

Определение 1.6. Двойственным конусом называется

$$\check{\sigma} := \{y : (\sigma, y) \geq 0\}$$

Лемма 1.7. Это действительно выпуклый конус. \square

Примеры.

- луч
- полуплоскость
- полуплоскость в трехмерном пр-ве
- конус на плоскости

Лемма 1.8. • Пусть σ – n -мерный конус в \mathbb{R}^n ; b_1, \dots, b_k – внутренние нормали его гиперграней. Тогда $\check{\sigma} = \text{pos}(b_1, \dots, b_k)$

- А если конус σ произвольной размерности, то $\check{\sigma} = \check{\sigma}_V \oplus V^\perp$, где $V := \text{aff}(\sigma)$.
- $\sigma \subset \tau \Rightarrow \check{\tau} \subset \check{\sigma}$

- $\check{\tau} = \tau$.

□

Теперь можно сформулировать принцип склейки.

Если есть конус σ и его грань $\tau \subset \sigma$, то

$$\check{\sigma} \subset \check{\tau}$$

и есть открытое вложение торического квазиаффинного многообразия

$$X_{\check{\tau}} \subset X_{\check{\sigma}}$$

Если есть два конуса σ и σ' общая грань τ , то $X_{\check{\tau}}$ вкладывается и в $X_{\check{\sigma}}$, и в $X_{\check{\sigma}'}$ (т.е. отождествляется с открытым подмножеством $X_{\check{\sigma}}$ и $X_{\check{\sigma}'}$).

Поэтому их можно склеить.

Определение 1.9. Веером называется набор Σ (выпуклых многогранных) конусов такой, что

- пересечение двух конусов – их общая грань
- если конус принадлежит Σ , то его грань тоже принадлежит Σ .

Веер бывает

- симплициальный (все конуса симплициальны)
- полный (объединение всех конусов $|\Sigma| = \mathbb{R}^n$)
- унимодулярный (все конуса унимодулярны).

Веер Σ задает торическое многообразие X_{Σ} :

Карты соответствуют конусам максимальной размерности. Всякие два конуса σ и σ' в пересечении дают их некоторую общую грань τ . X_{τ} открыто вкладывается как в X_{σ} , так и в $X_{\sigma'}$, задавая этим гомоморфизм склейки.

E-mail address: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net