ПЕРЕВОД

статьи Yves Matrinez-Maure 'Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la spheère// C. R. Acad. Sci.Paris, t.332, Série I, 41-44 (2001), выполненый В.А.Александровым 19 августа 2002 г.

Контрпример к одной гипотетической характеризации сферы

Ив Мартинез-Мор

1, rue Auguste-Perret, 92500 Rueil-Malmaison, France

Получена 19 октября 2000, принята к печати 23 октября 2000

Представлена Марселем Берже

Аннотация. Уже давно было высказано предположение, что замкнутая выпуклая поверхность класса C^2_+, главные кривизны K_1 и K_2 которой удовлетворяют неравенству $(K_1 - c)(K_2 - c) \leq 0$ при некоторой постоянной c, обязана быть сферой. Частные результаты были получены А.Д.Александровым, Х.Ф.Мюнцнером и Д.Коутроуфиотисом.

Мы переформулируем эту гипотезу в терминах ежей и строим контрпример. Кроме того, мы доказываем эту гипотезу для поверхностей постоянной ширины и даем новое доказательство для аналитических поверхностей.

1. Введение Уже давно была высказана гипотеза, что любая выпуклая замкнутая поверхность класса C^2_+ (т.е. класса C^2 с гауссовой кривизной > 0), главные кривизны K_1 и K_2 которой удовлетворяют неравенству $(K_1 - c)(K_2 - c) \leq 0$ при некоторой постоянной c, с необходимостью является сферой. Для аналитических поверхностей это было установлено А.Д.Александровым [1,2] и Х.Ф.Мюнцнером [7]. Эта гипотеза также проверена для поверхностей вращения [6] и для более общего класса поверхностей, у которых одна из ортогональных проекций является окружностью [3].

В настоящей заметке мы переформулируем эту гипотезу в терминах ежей и строим контрпример. Понятие ежа служит обобщением поонятия выпуклого тела класса C^2_+. Каждому выпуклому телу $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ сопоставляется опорная функция $h_K : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $p \mapsto h_K(p) = \max\ \{\langle m, p\rangle \mid m \in K\}$. Когда K принадлежит классу C^2_+, h_K принадлежит C^2 и определяет границу K как огибающую семейства гиперплоскостей, заданных уравнениями $\langle x, p\rangle = h_K(p)$. Даже если функция $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ не обязательно является опорной функцией некоторого выпуклого тела, с ней все равно можно связать огибающую $\mathcal{H}_h$ семейства гиперплоскостей, заданных уравнением $\langle x, p\rangle = h(p)$. Эта огибающая параметризована с помощью $x_h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $p \mapsto (\mathrm{grad}\ h)(p) + h(p)p$. Отображение x_h может быть интерпретировано как обратное к отображению Гаусса для $\mathcal{H}_h$: каждый регулярный кусок $\mathcal{H}_h$ допускает введение ориентации с помощью нормали таким образом, что p оказывается вектором нормали в точке $x_h(p)$. В работе Р.Ланжевена, Г.Левита и Г.Розенберга [4] гиперповерхность $\mathcal{H}_h$ названа ежом опорной функции h.

Пусть S есть некоторая замкнутая выпуклая поверхность класса C^2_+, главные кривизны K_1 и K_2 которой удовлетворяют неравенству $(K_1-c)(K_2-c) \leq 0$ при некоторой постоянной c. Положив $r = c^{-1}$, мы можем переписать это неравенство в виде $(R_1 - r)(R_2 - r) \leq 0$, где R_1 и R_2 — главные кривизны поверхности S. Обозначим через f опорную функцию поверхности S. Так как $x_f : \mathbb{S}^2 \to S$ является обратным к гауссову отображению поверхности S, то

$R_1(p)$ и $R_2(p)$ являются собственными значениями его касательного отображения $T_p x_f$ в точке p. Положив $h = f - r$, выводим, что $R_1(p) - r$ и $R_2(p) - r$ являются собственными значениями касательного отображения к x_h в точке p. Исходная гипотеза таким образом может быть переформулирована так: "Если функция кривизны $R_h(p) = \det\ (T_p x_h)$ ежа $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ неположительна на сфере $\mathbb{S}^2$, то $\mathcal{H}_h$ с необходимостью сводится к точке".

Изучение прекций ежа $\mathcal{H}_h$ дает нам информацию о сферическом представлении сингулярностей. Мы получим несколько известных частных результатов и новое доказательство для поверхностей постоянной ширины. В общем случае метод не проходит из-за существования сингулярностей типа "скрещенный колпак". Мы предъявляем ежа с особенностью типа "скрещенный колпак"и функцией кривизны ≤ 0 (моделируемый на $\mathbb{S}^2$ без некоторой полуокружности). Наконец, мы строим нетривиальный еж с функцией кривизны ≤ 0 на $\mathbb{S}^2$. В силу проективной двойственности это влечет существование не вполне геодезической 2-сферы, погруженной в $\mathbb{S}^3$ с внешней кривизной ≤ 0.

2. Изучение специальных случаев

Пусть $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — еж и $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{H}_h$. Индексом $i_h(x)$ называется алгебраическое число пересечений ориентированной полупрямой, выходящей из x, с ежом $\mathcal{H}_h$, снабженным ориентацией (это число не зависит от конкретной полупрямой из некоторого открытого плотного множества направлений). Функция кривизны ежа $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ связана с индеком плоского ежа, получаемого из $\mathcal{H}_h$ посредством ортогонального проектирования. Для всех $n \in \mathbb{S}^2$ ограничение функции h на окружность $\mathbb{S}^1_n = \mathbb{S}^2 \cap n^\perp$ является опорной функцией h_n "проекции"ежа $\mathcal{H}_h$ на $n^\perp$: $\mathcal{H}_{h_n} = (\pi_n \circ x_h)(\mathbb{S}^1_n)$, где π_n является ортогональной проекцией на $n^\perp$. Для индекса этой проеции справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1 ([5]). *Для каждого регулярного значения x ограничения $\pi_n \circ x_h$ на полусферу $\mathbb{S}^2_n = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid \langle p, n\rangle \geq 0\}$ верно равенство $i_{h_n}(x) = \nu^n_h(x)^+ - \nu^n_h(x)^-$, где $\nu^n_h(x)^+$ (соотв. $\nu^n_h(x)^-$) есть число точек $p \in \mathbb{S}^2_n$ таких, что $x_h(p)$ является эллиптической (соотв. гиперболтческой) точкой $\mathcal{H}_h$, лежащей на прямой $\{x\} + \mathbb{R}n$.*

Следовательно, если $\mathcal{H}_h$ имеет функцию кривизны ≤ 0 и не сводится к одной точке, то $i_{h_n} \leq 0$ и не является тождественным нулем. Так как $i_{h_n} \geq 0$ если $\mathcal{H}_{h_n}$ является окружностью или точкой, то это доказывает гипотезу для поверхностей, хоть одна из проекций которых является окружностью. Следующее следствие использует понятие точки ежа. Каждому ежу $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ соответствует псевдометрика, определенная на $\mathbb{S}^n$ равенством $\rho_h(p,q) = \inf\ (\{L(x_h \circ \gamma \mid \gamma \in C_{p,q}\}$, где $C_{p,q}$ есть множество кусочно C^1-гладких кривых с концами p и q, а $L(x_h \circ \gamma)$ является длиной кривой $x_h \circ \gamma$. Точкой ежа $\mathcal{H}_h$ по определению является точка пространства $(\mathbb{S}^n/\sim) = \{[p] \mid p \in \mathbb{S}^n\}$, где $p \sim q$ если и только если $\rho_h(p,q) = 0$, снабженном метрикой $d_h([p],[q]) = \rho_h(p,q)$. Но для простоты мы не различаем точку $[p]$ и ее геометрическую реализацию $x_h(p)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ имеет функцию кривизны ≤ 0, то (i) для всех $x \in n^\perp - \mathcal{H}_{h_n}$ существует ровно $-2i_{h_n}(x)$ точек $\mathcal{H}_h$, геометрические реализации которых лежат на прямой $\{x\} + \mathbb{R}n$; (ii) для каждой точки $x \in \mathcal{H}_{h_n}$ каждая точка ежа $\mathcal{H}_h$, геометрическая реализация которой лежит на прямой $\{x\} + \mathbb{R}n$, является классом некоторой точки окружности $\mathbb{S}^1_n = \mathbb{S}^2 \cap n^\perp$.*

Пусть $\mathcal{H}_h$ является ежом в $\mathbb{R}^{n+1}$. Говорят, что $s \in x_h(\mathbb{S}^n)$ является экстремальной точкой для $\mathcal{H}_h$ в направлении $n \in \mathbb{S}^n$, если $\langle x_h(p), n\rangle \leq \langle s, n\rangle$ для всех $p \in \mathbb{S}^n$.

ЛЕММА 1. *Пусть s является экстремальной точкой ежа $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ в направлении $n \in \mathbb{S}^1$. Тогда на $\mathbb{S}^1$ компоненты связности $x_h^{-1}(s)$ разделяются множеством $\{n, -n\}$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $s = (0,0)$ и $n = (0,1)$. Тогда опорная прямая с нормалью $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \notin \{-n, n\}$ пересекает $n^\perp$ в точке $(x(\theta), 0)$, где $x(\theta) = h(n_\theta)/cos\theta$. Если внутренность дуги $\Gamma \subset \mathbb{S}^1$ с клнцами $\alpha, \beta \in x_h^{-1}(s)$ не пересекает $\{-n, n\}$, то $\Gamma \subset x_h^{-1}(s)$. В самом деле, тогда мы бы имели $x(\theta) \to 0$ если $u_\theta \to \alpha$ или β, $x'(\theta) = \langle x_h(u_\theta), n\rangle / \cos^2\theta \leq 0$ если $u_\theta \in \Gamma - \{\alpha, \beta\}$ и, следовательно, $h = 0$ на Γ. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть еж $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ имеет функцию кривизны ≤ 0. Если $\mathcal{H}_h$ не является точкой, то $\mathcal{H}_h$ допускает в некотором напрвлении $n \in \mathbb{S}^2$ экстремальную точку s, сферическое представление $x_h^{-1}(s)$ которой не пересекает одну из полуокружностей, соединяющих $-n$ и n на $\mathbb{S}^2$.*

Доказательство. Если $\mathcal{H}_h$ не является точкой, то существует направление $n \in \mathbb{S}^2$ в котором $\mathcal{H}_h$ имеет две различные экстремальные точки s_1 и s_2. Положим $p = (s_2 - s_1)/\|s_2 - s_1\|$ и рассмотрим проекцию $\mathcal{H}_h$ на $p^\perp$. Общая проекция s точек s_1 и s_2 является экстремальной точкой $\mathcal{H}_{h_p}$ в направлении n. Одна из компонент связности множества $x_{h_p}^{-1}(s)$ не пересекает сразу (одновременно) $x_h^{-1}(s_1)$ и $x_h^{-1}(s_2)$ так как $\mathcal{H}_h$ не содержит сегмента $[s_1, s_2]$. Однако $x_h^{-1}(s_1)$ и $x_h^{-1}(s_2)$ пересекают $x_{h_p}^{-1}(s)$ (следствие 1) и их компоненты разделяются множеством $\{-n, n\}$ на $\mathbb{S}_p^1$ (лемма 1), следовательно, $x_h^{-1}(s_1)$ (соотв. $x_h^{-1}(s_2)$) не пересекает одну из полуокружностей, соединяющих $-n$ и n на $\mathbb{S}_p^1$. $\square$

Еж $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ называется аналитическим (соотв. проективным) если его опорная функция h является аналитической (соотв. антисимметричной: для каждого $p \in \mathbb{S}^n$, $h(-p) = -h(p)$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ является аналитическим (соотв. проективным) ежом с функцией кривизны ≤ 0, то $\mathcal{H}_h$ является точкой.*

Доказательство. Пусть s является экстремальной точкой ежа $\mathcal{H}_h$ в напрвлении $n \in \mathbb{S}^2$ и $[m]$ является точкой ежа $\mathcal{H}_h$, для которой s является геометрической реализацией. Согласно теореме 2 достаточно проверить, что $x_h^{-1}(s)$ пересекает каждую полуокружность, соединяющую $-n$ и n на $\mathbb{S}^2$. Согласно следствию 1, $[m]$ пересекает каждую большую окружность, проходящую через n. Если $\mathcal{H}_h$ является проективным ежом, то $x_h^{-1}(s)$ инвариантно относительно антиподального преобразования и результат достигнут. Допустим $\mathcal{H}_h$ является аналитическим ежом, не сводящимся к точке. Поскольку отображение $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle x_h(u), n\rangle$ аналитично, компоненты связности $\phi(u) = \langle s, n\rangle$ являются либо точками, либо простыми замкнутыми дугами, либо погружениями некоторых связных графов, все вершины которых имеют четную степень [8]. Обозначим через C ту компоненту связности, которая содержит $[m]$. Поскольку $[m]$ пересекает все большие дуги, проходящие через n, и пересекает самое большее один раз каждую большую полуокружность, соединяющую $-n$ и n (лемма 1), то либо C пересекает $\{-n, n\}$ либо C является простой дугой, разделяющей $-n$ и n на $\mathbb{S}^2$. Однако, $C \subset x_h^{-1}(s)$ (иначе некторая проекция ежа $\mathcal{H}_h$ содержала бы нетривиальный сегмент). Следовательно, $x_h^{-1}(s)$ пересекает каждую полуокружность, соединяющую $-n$ и n на $\mathbb{S}^2$, что противоречит теореме 2. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Гипотеза верна для аналитических поверхностей (соотв. для поверхностей постоянной ширины).*

Доказательство. Случай аналитических поверхностей непосредственно вытекает из теоремы 3. Если S имеет постоянную ширину, то $h = f - r$ имеет вид $g + k$, где g антисимметрично, а k постоянно. Тогда мы имеем $R_h = R_g + 2kR_{(1,g)+k^2}$, где $R_{(1,g)}$ обозначает среднее арифметическое главных радиусов кривизны ежа $\mathcal{H}_g$. Отсюда замечая, что неравенство $R_h \leq 0$, примененное к антиподальным особым точкам x_g, дает $k^2 \leq 0$, получаем, что $\mathcal{H}_h$ является проективным ежом. $\square$

3. Контрпример

Ни метод параграфа 2, ни предшествующие работы не позволяют принимать во внимание особенности типа скрещенного колпака. Отображение $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (x, y, z) = r^4(u, 1, uv)$, где $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, определяет скрещенный колпак, который можно рассматривать как еж $\mathcal{H}_h$ (моделируемый на сфере $\mathbb{S}^2$ с удавленной полуокружностью $z = 0$, $x \leq 0$) с функцией кривизны ≤ 0. На $\mathbb{S}^2$ множество критических точек ежа $\mathcal{H}_h$ является полуокружностью $y = 0$, $x \geq 0$. Являясь сферическим представлением экстремальной точки в направлении $n = (0, -1, 0)$, эта полуокружность не пересекает геодезические линии сферы $\mathbb{S}^2$, которые соединют $-n$ и n и расположены в полусфере $x < 0$. Метод параграфа 2 не может быть, следовательно, применен к изучению таких сингулярностей. Регулярная часть ежа $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ является частью алгебраической поверхности, заданной уравнением $x^5y^5 - (x^4 + y^2z^2)^2 = 0$, содержащейся в полупространстве $y > 0$. Следовательно, она может быть получена склеиванием графика функции $f(x, y) = (x/y)\sqrt{y^{5/2} - x^2}$ с его симметричным образом относительно плоскости $z = 0$. Проверка не представляет особых трудностей. Этот пример показывает, что неаналитический еж может иметь аналитическую параметризацию.

Приведенный пример наводит на мысль соединить 4 скрещенных колпака так, чтобы получить еж, с функцией кривизны ≤ 0 на $\mathbb{S}^2$. Начнем со склеивания графика функции

$$f(x,y) = \frac{xy}{1 - x^4 - y^4}\sqrt{(1 - x^4 - y^4)^{5/2} - 25x^2y^2(x^8 + y^8 + 3(x^4 + y^4 - x^4y^4) + 1)^{1/2}},$$

где $(x, y) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | |u|^{4/5} + |v|^{4/5} \leq 1\}$, с его симметричным образом относительно плоскости $z = 0$ (заметим, что подкоренное выражение в точности зануляется на границе области D). Полученная поверхность образована четырьмя скрещенными колпаками, но имеет кривизну ≥ 0. Наконец, чтобы исключить кривизну ≥ 0, добавим к f функцию вида $g(x, y) = a(x^2 - y^2) + b(x^4 - y^4)$ с $a \neq 0$ и $a + 6b = 0$, для которых график функции $g : D \to \mathbb{R}$ имеет кривизну < 0 всюду, кроме особых точек на границе. Иными словами, рассмотрим параметрическое семейство поверхностей $(\mathcal{S}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$, определяемое формулами $X_t : D \times \{-1, 1\} \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, \varepsilon \mapsto (x, y, (x^2 - y^2) - \frac{1}{6}(x^4 - y^4) + t\varepsilon f(x, y))$.

Вычисления на компьютере показывают, что существует интервал значений параметра t, для которых $\mathcal{S}_t$ является поверхностью с гауссовой кривизной < 0. Среди этих значений мы выбираем $t = 1/12$. Поверхность $\mathcal{S}_{1/12}$ является частью алгебраической поверхности. Она симметрична относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$ и относительно прямых $x=y=0$ и $z=0$, $x=y$ (соотв. $x=-y$). Поскольку она является склейкой двух графиков, расположенных над D (чьи границы являются ежами с опорной функцией $(u,v)\mapsto uv(u^4+v^4)^{-1/4}$, $(u,v)\in\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$) строгая отрицательность ее гауссвой кривизны (и, следовательно, локальная инъективность ее гауссова отображения) влечет то, что она может рассматриваться как некоторый еж $\mathcal{H}_h$. Изучим его класс дифференцируемости. Вычисления на компьютере показывают, что множество особых точек ежа $\mathcal{H}_h$ образовано на $\mathbb{S}^2$ чтырьмя полуокружностями: (i) $3x+4z=0$, $y\geq 0$; (ii) $3y-4z=0$, $x\geq 0$; (iii) $3x-4z=0$, $y\leq 0$; (iv) $3y+4z=0$, $x\leq 0$. Сразу проверяется, что h принадлежит C^∞ вне сингулярного множества и принадлежит C^1 на всем $\mathbb{S}^2$ (заметим, что x_h является ограничением на S^2 градиента функции $\varphi(u)=\|u\|h(u/\|u\|)$, $u\in\mathbb{R}^3-\{0_{\mathbb{R}^3}\}$). Можно доказать также, что h принадлежит C^2 на $\mathbb{S}^2$ и заметить, что на $\mathbb{S}^2$ собственные значения отображения $(\operatorname{hess}\varphi)(p)$ (0 и главные радиусы кривизны ежа $\mathcal{H}_h$ в точке $x_h(p)$) стремятся к нулю при подходе к сингулярному множеству (вычисления показывают, что R_h и $R_{(1,h)}$ стремятся к нулю при приближении к сингулярному множеству).

Цитированная литература

[1] Александров А.Д. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей// Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 22, №3. — С. 99–102.

[2] Александров А.Д. О кривизне поверхностей// Вестн. ЛГУ. — 1966. —№19. Сер. математики, механики, астрономии. — Вып. 4. — С. 5–11.

[3] Koutroufiotis D. On a conjectured characterization of the sphere// Math. Ann. — 1973. — V. 205. — P. 211–217.

[4] Langevin R., Levitt G., Rosenberg H. Hérissones et multihérissons (enveloppes parametreés par leur application de Gauss). Singularities, Banach Center publ. — 1988. — V. 20. P. — 245–253.

[5] Martinez-Maure Y. Indice d'un hérisson: Étude et applications. Publ. Mat., Barc. — 2000. — V. 44, No.1. — P. 237–255.

[6] Münzner H.F. Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie// Comment. Math. Helv. — 1966. — V. 41. — P. 88–104.

[7] Münzner H.F. Über Flächen mit einer Weingartenschen Ungleichung// Math. Z. — 1967. — V. 97. — P. 123–139.

[8] Sullivan D. Combinatorial invariants of analytic spaces// В кн.: Proc. Liverpool Singularities-Sympos. I. Lect. Notes Math. — 1971. — V. 192. — P. 165–168.